(Pour que $\lim_{X\to 1^-}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)$ existe, l'astuce consiste ici à prendre comme primitive de $\frac{1}{x^2}$ celle qui s'annule en $x=1$, c-à-d $1-\frac{1}{x}$.

On a $\lim_{X\to 1^-}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)=0$ et $\lim_{X'\to 0^+}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)=0$

Par conséquent, $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ et $\int_0^1 (1-\frac{1}{x})\frac{-2x}{1-x^2}dx$ sont de même nature. On a d'autre part

$$\lim_{\substack{X\to 1\\ X'\to 0}} \int_{X'}^{X} (1-\frac{1}{x})\frac{-2x}{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{-2}{1+x}dx = -2\ln(2).$$

D'où

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = -2\ln(2).$$

3.1 Intégrales généralisées des fonctions à valeurs positives

On se place sur $I=[a,b[$ (avec $-\infty<a<b\leq+\infty$) et se donne une fonction f localement intégrable sur cet intervalle. On désigne pose $F: x\mapsto \int_a^x f(t)dt$.

3.27 PROPOSITION
Si f est à valeurs positives et si $\int_a^b f(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Démonstration: Se déduit de la définition, des propriétés des limites et du résultat analogue sur les intégrales de Riemann des fonctions continues.

On rappelle que si F est une fonction croissante de $I=[\alpha,b[$ dans $\mathbb{R}$, elle admet alors une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée. Dans le cas où elle est majorée, on a :

$$\lim_{x\to b} F(x) = \sup_{x\in[a,b[} F(x)$$

et dans le cas contraire, on a $\lim_{x\to b} F(x)=+\infty$.

Comme conséquence de ce résultat, on a le suivant.

3.29 PROPOSITION
Si f est à valeurs positives, alors l'intégrale de f sur $[a,\ b[$ est convergente si, et seulement si, la fonction F est majorée.

Démonstration: Comme f est positive, la primitive F est une fonction croissante et elle a une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée.

Si F n'est pas majorée, on a alors $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$. ■

Pour f à valeurs positives : en cas de divergence on a $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ et en cas de convergence, on notera naturellement $\int_a^b f(t)dt<+\infty$.

3.31 REMARQUE
Le cas d'une fonction f à valeurs négatives se ramène à celui d'une fonction positive en étudiant $g=-f$.

On déduit du résultat précédent un théorème de comparaison analogue à celui obtenu pour les séries numériques.

3.32 COROLLAIRE (1)
Soient f, g deux fonctions definies, localement intégrables sur $[a, b[$, à vaeurs réelles positives et telles que :

$$\forall x \in [a,\ b[,\ f(x) \leq g(x).$$

1) La convergence de l'intégrale de g sur $[a,\ b[$ entraîne la convergence de l'intégrale de f sur $[a,\ b[$ avec :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

2) La divergence de l'intégrale de f sur $[a,\ b[$ entraîne la divergence de l'intégrale de g sur $[a,\ b[$.

Démonstration: En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ pour tout x dans $[a,\ b[$, on a $F(x) \leq G(x)$ pour tout x dans $[\alpha, b[$.

Si l'intégrale de g sur $[a,\ b[$ est convergente la fonction G est alors bornée et il en est de même de la fonction F de sorte que l'intégrale de f sur $[a,\ b[$ est convergente.

Si l'intégrale de f sur $[a,\ b[$ diverge alors $\lim\limits_{x\to b} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to b} G(x) = +\infty$ de sorte que l'intégrale de g sur $[a,\ b[$ est aussi divergente. ∎

3.34 EXEMPLE. L'intégrale de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est convergente sur $]-\infty, +\infty[$.

La fonction étant paire, il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 1$ on a $x^2 \geq x$ et :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt$$

$$\leq \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t}dt \leq \int_0^1 e^{-t^2}dt + 1.$$

La fonction f étant positive, il en résulte que F est croissante et majorée, elle admet donc une limite en $+\infty$.

On montrera plus loin que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

3.35 EXEMPLE. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$ est divergente.

Pour $x \in]0, 1]$, on a $0 < \sin(x) \leq x$ d'où

$$\int_x^1 \frac{dt}{t}dt \leq \int_x^1 \frac{1}{\sin(t)}dt$$

et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}dx$ diverge comme $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

On déduit du corollaire 2 :

3.36 COROLLAIRE (2)
Soient f, g deux fonctions definies, localement intégrables sur $[a, b[$, à vaeurs réelles positives et telles que il existe deux constante > 0, C_1 et C_2 telles que

$$\forall x \in [a,\ b[,\ C_1.g(x) \leq f(x) \leq C_2.g(x).$$

Alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

3.37 Définition
On dit que les fonctions f et g, définies sur $[a,\ b[$, sont équivalentes quand x tend vers b s'il existe une fonction ϵ définie sur un intervalle $[a,b[$ telle que :

$$\forall x \in [a,\ b[,\ f(x) = g(x)(1+\epsilon(x)),$$

$$\lim_{x\to b} \epsilon(x) = 0.$$

On note alors $f \underset{b}{\sim} g$.

3.38 Remarque
Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b, on a

$$f \underset{b}{\sim} g \iff \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

L'utilisation de développements limités permet parfois d'obtenir des équivalents.

3.39 Corollaire (3)
Soit $f,\ g$ deux fonctions definies et localements intégrables sur $[a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telles que $f \underset{b}{\sim} g$. Les intégrales de f et g sur $[a,\ b[$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

$$\int_x^b f(t)dt \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$$

et en cas de divergence :

$$\int_a^x f(t)d \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$$

Démonstration:

Comme $f \underset{b}{\sim} g$ il existe une fonction ϵ définie sur un intervalle $[a,\ b[$ telle que $\lim_{x\to b} \epsilon(x) = 0$ et $f(x) = g(x)(1+\epsilon(x))$ pour tout $x \in [a,b[$. On peut alors trouver $c \in [ab[$ tel que :

$$\forall x \in [c,\ b[,\ -\frac{1}{2} < \epsilon(x) < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte alors, puisque f et g sont à valeurs positives, que :

$$\forall x \in [c,\ b[,\ \frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x).$$

par suite, d'après le corollaire 2, Les intégrales de f et g sur $[a,\ b[$ sont de même nature.

3.41 Exemple. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}+\cos(x)+1}$. La fonction f est continue donc localement intégrable et $\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)f(x) = 1$ donc $f \underset{+\infty}{\sim} g$ où $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}+\cos(x)+1}$ converge, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente.

3.42 COROLLAIRE (4)
Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrable.
On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que

$$\lim_{x \to b} (b-x)^\alpha f(x) = \ell$$

1) Si $\alpha < 1$ et $\ell \in [0, +\infty[$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

2) Si $\alpha \geq 1$ et $\ell > 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.

Démonstration: 1) Par hypothèse il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b[$ on a

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ell+1}{(b-x)^\alpha}.$$

Comme $\alpha < 1$, l'intégrale de Riemann $\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_0^{b-c} \frac{du}{u^\alpha}$ converge, il en est de même de $\int_a^b f(x)dx$.

2) Par hypothèse il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b[$ on a

$$f(x) \geq \frac{\frac{\ell}{2}}{(b-x)^\alpha} \quad \text{si} \quad \ell \in]0, +\infty[$$

$$f(x) \geq \frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \text{si} \quad \ell = +\infty$$

Comme $\alpha \geq 1$, l'intégrale de Riemann $\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_0^{b-c} \frac{du}{u^\alpha}$ diverge, il en est de même de $\int_a^b f(x)dx$. ∎

3.44 EXEMPLE. Soit $0 < a < 1$ et $f : [a, 1[\to \mathbb{R}_-$ définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x \ln x}$.

La fonction f est continue et $\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{\frac{3}{4}} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{x} \left(\frac{1-x}{\ln x} \right) = 0.$

Comme $\alpha = \frac{3}{4} < 1$ et $\ell = 0$, d'après le corollaire $\int_a^a \frac{\sqrt{1-x}}{x \ln x} dx$ est convergente.

3.45 COROLLAIRE (5)
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrable.
On suppose qu'il existe $\alpha \geq 0$ et $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = \ell.$$

1) Si $\alpha > 1$ et $\ell \in [0, +\infty[$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

2) Si $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.

Démonstration: 1) Par hypothèse il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b[$ on a

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ell+1}{x^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) Par hypothèse il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [a, b[$ on a

$$f(x) \geq \frac{\frac{\ell}{2}}{x^\alpha} \text{ si } \ell \in]0, +\infty[$$

$$f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha} \text{ si } \ell = +\infty$$

Comme $\alpha \leq 1$, l'intégrale de Riemann $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge, il en est de même de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
■

3.47 EXEMPLE (INTÉGRALES DE BERTRAND GÉNÉRALISÉE EN $+\infty$). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. On définit les *logarithmes logarithmes itérés*, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, $\ln_p$ par : si $p = 1$, $\ln_1$ est la fonction logarithme ln usuelle; si $p \geq 2$, $\ln_p$ est la fonction $x \mapsto \ln(\ln_{p-1}(x))$ définie sur $]e_p, +\infty[$ où $e_1 = 0$ et $e_p = e^{e_{p-1}}$ pour $p \geq 2$.
Chaque fonction $\ln_p$ est de classe C^∞, strictement croissante sur $]e_p, +\infty[$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, et pour $p \geq 2$, la dérivée de $\ln_p$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln_1 x \ldots \ln_{p-1}(x)}$.

Maintenant pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on définit
$f_{p,\alpha,\beta} : [e_{p+1}, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln_1 x \ldots \ln_{p-1} x (\ln_p x)^\beta}$

Alors $\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha,\beta}(x)dx$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha > 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

En effet,

1) Si $\alpha = 1$. On a $\int_{e_{p+2}}^{X} f_{p,1,\beta}(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}((\ln_p X)^{1-\alpha} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln_{p+1}(X) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$. D'où $\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,1,\beta}(x)dx$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

2) Si $\alpha > 1$, $\dfrac{\alpha+1}{2} > 1$ et $\dfrac{\alpha-1}{2} > 0$. On a alors, par les croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} f_{p,1,\beta}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln_1 x \ldots \ln_{p-1} x (\ln_p x)^\beta} = 0.$$

D'après le corollaire précédent, $\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha,\beta}(x)dx$ est convergente.

3) Si $\alpha < 1$, $\dfrac{\alpha+1}{2} < 1$ et $\dfrac{\alpha-1}{2} < 0$. On a alors, par les croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} f_{p,1,\beta}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln_1 x \ldots \ln_{p-1} x (\ln_p x)^\beta} = +\infty.$$

D'après le corollaire précédent, $\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha,\beta}(x)dx$ est divergente.

3.48 REMARQUE
En particulier si $p = 1$ alors $\int_e^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha > 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

3.2 Critère de Cauchy. Convergence absolue.

On va maintenant examiner le cas des fonctions qui ne garde pas (nécessairement) un signe constant. On rappelle le critère de Cauchy pour les limites de fonctions :

3.49 Théorème (Critère de Cauchy pour les limites de fonctions)
Soit $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction F admet une limite finie lorsque $x \in [a, b[$ tend vers b si et seulement si tout $\epsilon > 0$ il existe $c \in [a,\ b[$ tel que, pour tout X, X' :

$$c \le X < X' < b \implies \left|F(X') - F(X)\right| \le \epsilon.$$

Tout d'abord voyons comment le critère de Cauchy pour les fonctions nous fournit un critère de convergence des intégrales généralisées.

3.50 Théorème (Critère de Cauchy)
Soient $-\infty < a < b \le +\infty$ et f une fonction localement intégrable sur $[a,\ b[$. L'intégrale de f est convergente sur $[a,\ b[$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c \in [a,\ b[$ tel que, pour tout X, X' :

$$c \le X < X' < b \implies \left|\int_X^{X'} f(t)dt\right| \le \epsilon.$$

Démonstration: Il s'agit simplement du critère de Cauchy pour les limites de fonctions à F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, d'où $F(x) - F(x') = \displaystyle\int_x^{x'} f(t)dt$ et le Cauchy pour les limites de fonctions nous assure de l'existence de la limite en b. ■

3.52 Définition
L'intégrale de f sur $[a,\ b[$ (à valeurs réelles ou complexes) est dite absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt < +\infty$.

On dispose du résultat suivant.

3.53 Théorème
Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,\ b[$ avec $-\infty < a < b \le +\infty$. Si l'intégrale *de f sur $[a,\ b[$ est absolument convergente elle est alors convergente et on a* :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration: Comme $-|f| \le f \le |f|$, on déduit que $0 \le f + |f| \le 2|f|$, ce qui implique la convergence de $\displaystyle\int_a^b (f + |f|)(x)dx$, par conséquent

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f + |f|)(x)dx - \int_a^b |f(x)|dx$$

est convergente.

De $-|f| \le f \le |f|$, on déduit que $-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$, par suite

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

3.55 REMARQUE
Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant le critère de Cauchy comme suit.
Pour tous $x < y$ dans $[a, b[$ on a :

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt.$$

De la convergence de $\int_a^b |f(t)|dt$ on déduit que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $c \in [\alpha, b[$ tel que pour $c \leq x < y < b$ on ait $\int_x^y |f(t)|dt \leq \epsilon$ ce qui entraîne $|\int_x^y f(t)dt| \leq \epsilon$. Le critère de Cauchy permet alors de conclure.

3.56 EXEMPLE. Pour tout réel $\alpha > 1$. les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont absolument convergentes.

Ceci résulte de la convergence des intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ et de :

$$\forall x \geq 1, \left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

3.57 EXEMPLE. Pour tout $\alpha > 0$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont convergentes.

On va traiter le cas de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ celui de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ s'obtient de la même manière. Une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt.$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{t^{\alpha+1}}dx$ converge absolument (l'exemple précédent), donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ est convergente.